

# APLICACIÓN Y MEJORAS AL MÉTODO MPM PARA EL ANÁLISIS DE DESLIZAMIENTOS Y MOVIMIENTOS DE TIERRA<sup>1</sup>

Pedro Arduino<sup>2</sup>, Peter Mackenzie-Helnwein<sup>3</sup>, Carter Mast<sup>4</sup> y Gregory R. Miller<sup>5</sup>

**Resumen:** En este artículo se presentan dos extensiones al Método de Puntos Materiales (MPM) que mejoran la aptitud del método en la simulación de deslizamientos y movimientos de tierra. La primera consiste en el uso de una formulación de multi-fase que permite el análisis de mezclas sólido-fluido y su interacción a varias escalas. La segunda provee una técnica apropiada para mitigar el problema de “locking” que surge de usar, en el MPM estándar, funciones de interpolación lineales en una grilla Euleriana. Para este caso se propone una estrategia de relajación basada en el principio de Hu-Washizu y se demuestra su aplicabilidad en la modelación de flujos granulares.

**Palabras clave:** movimientos de tierra, MPM, multi-fase, “locking” volumétrico, flujo granular.

## APPLICATION AND IMPROVEMENTS TO THE MPM METHOD TO THE ANALYSIS OF LANDSLIDE AND DEBRIS-FLOW

**Abstract:** This work presents two suitable extensions to the Material Point Method (MPM) for improved modeling capabilities in the context of landslide and debris flows. The first provides a multi-field formulation strategy to support solid/fluid phases and multi-scale interactions, while the second provides an appropriate technique to mitigate the locking induced by the use of multilinear interpolation functions on an Eulerian grid in standard MPM. For this purpose we propose a simple relaxation procedure based on a three-field Hu-Washizu principle and demonstrate its applicability to modeling granular flow problems.

**Keywords:** debris-flows, granular flow, MPM, multiphase, volumetric locking.

### INTRODUCCIÓN

El deslizamiento y movimiento de tierra (“landslide and debris flows”) es una de las causas principales de daños y pérdida de vida en el mundo. Solamente en los Estados Unidos las pérdidas económicas ocasionadas por deslizamientos de tierra alcanzan valores de alrededor de \$1 a \$5 billones (\$1billion = \$1,000 millones) y 25 a 50 muertes al año (Highland, 2006). La protección de seres humanos e infraestructura requiere el diseño de estructuras capaces de resistir las fuerzas generadas en estos eventos. Desafortunadamente, la determinación de estas fuerzas constituye un desafío a veces difícil de sortear dado que eventos de esta naturaleza son sumamente complejos y dinámicos. La verdadera dimensión de esta complejidad puede ser entendida considerando algunos de los retos que surgen al tratar de modelar deslizamiento y movimientos de tierra. Un modelo general de este fenómeno debe poseer la capacidad de capturar la transición de estado sólido a fluido y viceversa, el proceso de interacción de fases, la restricción volumétrica impuesta por cada fase, las condiciones de contorno generales, y comportamientos constitutivos apropiados tanto para el sólido como el fluido; todo esto dentro de un contexto con complejidades a varias escalas. El objetivo de este trabajo es presentar el desarrollo de un marco de modelaje numérico, robusto y eficiente, capaz de acomodar estos aspectos fenomenológicos con la meta principal de poder predecir fuerzas en estructuras de protección. El enfoque básico se basa en la adaptación y extensión del Método de Puntos Materiales (MPM), apropiado para problemas de grandes deformaciones, al caso de deslizamientos y movimiento de tierras. En este trabajo se incluye una breve descripción del algoritmo MPM convencional y dos extensiones al método: (i) una formulación de multi-campo apropiada para la representación de sólidos y fluidos y su interacción, y (ii) una estrategia efectiva para mitigar problemas de “locking” que dominan el proceso de solución a medida que el comportamiento material simulado se acerca al límite de la incompresibilidad.

---

<sup>1</sup> Artículo recibido el 14 de setiembre de 2011 como parte del 2do Encuentro Latino de Profesores de Geotecnia. Artículo aceptado en versión final el 15 de noviembre de 2011.

<sup>2</sup> Associate Professor, Department of Civil and Environmental Engineering, University of Washington, Seattle, WA, 98195-2700, E-mail: parduino@uw.edu

<sup>3</sup> Research Associate Professor, Department of Civil and Environmental Engineering, University of Washington, Seattle, WA, 98195-2700, E-mail: pmackenz@uw.edu

<sup>4</sup> PhD candidate, Department of Civil and Environmental Engineering, University of Washington, Seattle, WA, 98195-2700, E-mail: cmast@uw.edu

<sup>5</sup> Professor, Department of Civil and Environmental Engineering, University of Washington, Seattle, WA, 98195-2700, E-mail: gmiller@uw.edu

## DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO MPM

El Método de Puntos Materiales (MPM) es una técnica numérica para la solución de ecuaciones diferenciales hiperbólicas con origen en la mecánica de fluidos y extendida a la mecánica de sólidos por Sulsky (Sulsky et al., 1995). En el método las ecuaciones que gobiernan el problema se resuelven en puntos (nodos) definidos en una grilla Euleriana (conjunto de celdas generalmente uniforme). Cada cuerpo se representa usando puntos materiales, llamados partículas, que pueden moverse y cruzar celdas libremente. Estas partículas conllevan variables de estado (i.e., deformaciones, variables internas, temperatura, etc.) definidas usando una descripción Lagrangiana. Esta descripción híbrida Euleriana-Lagrangiana permite la representación del comportamiento de sólidos y fluidos sometidos a grandes deformaciones en un marco único y general – un aspecto necesario para el análisis de deslizamientos y movimientos de tierra. No obstante poseer varias características que lo hacen ideal para este tipo de problema, el método sufre de varios inconvenientes y defectos. En particular, en su forma original el método carece de una formulación multi-campo y sufre de problemas de “locking”. Estos obstáculos pueden ser superados estableciendo extensiones apropiadas al algoritmo original. En la Figura 1 se muestra la simulación de un deslizamiento usando uno de estos algoritmos MPM mejorado.

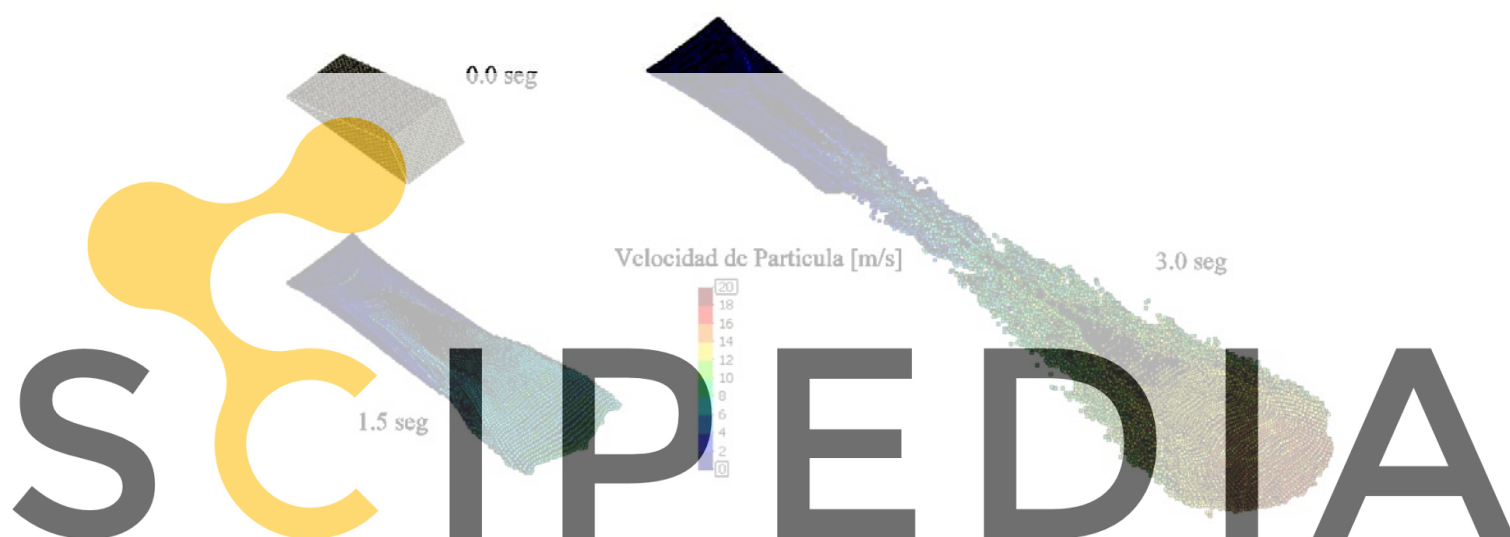


Figura 1: Simulación de la transición entre un comportamiento estático, el inicio y el subsecuente desarrollo de un movimiento de tierra en un plano inclinado con resistencia friccional.

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

Uno de los desafíos más importantes en el análisis numérico de flujos de multi-fase es el desarrollo de modelos de interacción que permitan describir en forma adecuada el comportamiento de dos o más fases que interactúan entre sí. El desafío incluye consideraciones de escala y de elección de estrategias para representar cada fase (i.e., fases individuales, volúmenes promedios, etc.). En el caso de deslizamientos y movimientos de tierra, la longitud de escala del evento es órdenes de magnitud más grande que la longitud de escala característica de las partes individuales (fluido, sólido). Esto impone la necesidad de un marco de análisis de multi-fase que permita la conexión efectiva entre la interacción de cada fase a nivel microscópico con la respuesta observada a nivel macroscópico. Este concepto se ilustra en la Figura 2 para dos fases (i.e.,  $f$  = fluido y  $s$  = sólido). En el enfoque presentado en la figura se asume que cada fase puede ser aislada a nivel micro- y macroscópico de manera que a cada una se le puede asignar su propio movimiento. En la figura, las cantidades (■) asociadas con una fase  $\alpha$  a nivel microscópico se las identifica con corchetes cuadrados ((■)<sup>[ $\alpha$ ]</sup>) mientras que aquellas asociadas con una representación macroscópica se identifican con un paréntesis ((■)<sup>( $\alpha$ )</sup>). La conexión entre los esfuerzos microscópicos  $\sigma^{[ $\alpha$ ]}$  (o la tracción en la interface respectiva  $\tau^{[ $\beta, \alpha$ ]}$ ) y las cantidades macroscópicas  $\sigma^{( $\alpha$ )}$  y  $b^{( $\beta, \alpha$ )}$  (esfuerzo y carga volumétrica) de cada fase se obtienen a través de un proceso de promedio volumétrico sobre un elemento de volumen representativo (EVR). La geometría de un EVR se elige de tal manera que las cantidades promedio sean estacionarias con respecto a cambios en tamaño y forma del EVR. De hecho, cada partícula en MPM puede ser vista como un EVR que posee cantidades promedios para el volumen que representan. En este sentido (i.e., usando tanto partículas como celdas como EVR) el concepto propuesto provee un marco apropiado para la modelación de problemas con escalas múltiples.

Una vez obtenidas las cantidades macroscópicas  $\sigma^{( $\alpha$ )}$  y  $b^{( $\beta, \alpha$ )}$ , la modelación de las fuerzas de resistencia que se originan en el proceso de interacción entre dos (o más) fases se evalúa utilizando varias técnicas. En Mackenzie-Helnwein et al. (Mackenzie-Helnwein et al., 2010) cada fase es tratada usando movimientos independientes y se investigan varios modelos de interacción en el contexto de MPM. El trabajo considera procedimientos basados en nodos y partículas y se presenta un nuevo método basado en relaciones de volumen suavizadas. Esta formulación multi-fase permite una simulación comparativamente simple de los procesos de mezcla, interacción, y separación de fases.

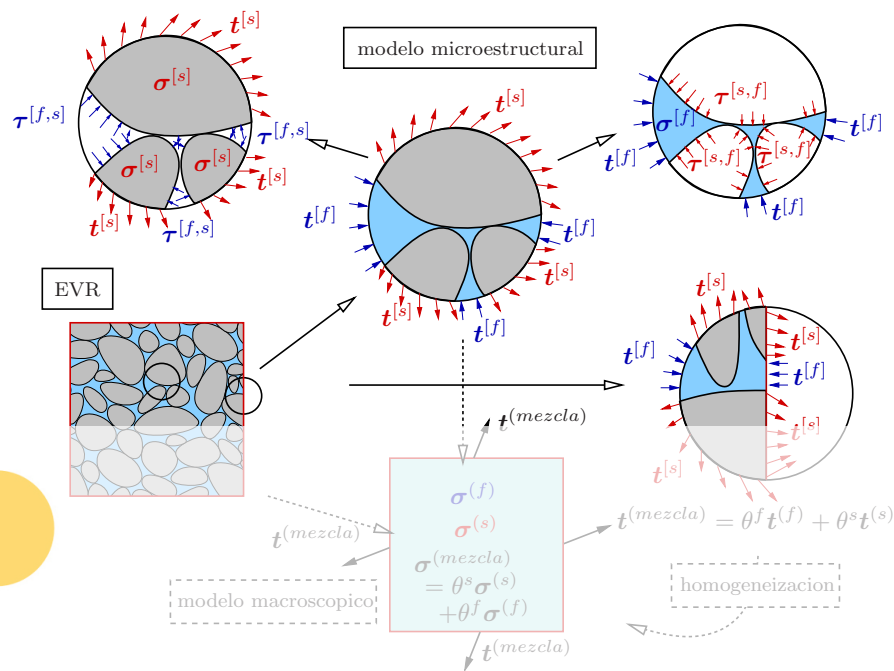


Figura 2: Ilustración de un modelo con múltiples escalas para una mezcla fluido-sólido definida en términos de dos fases distintas.

## DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE “LOCKING”

Los materiales granulares se caracterizan por manifestar un comportamiento dilatante (i.e., cambio volumétrico asociado con corte) (Li y Dafalias, 2000). En casos donde las grandes deformaciones prevalecen, como se observa en deslizamientos de tierra, esta dilatación alcanza un valor límite. Como consecuencia, las deformaciones subsiguientes pueden y deben ser tratadas como incompresibles. Esta incompresibilidad impone desafíos en cualquier técnica numérica que se emplee a nivel macroscópico, inclusive en MPM. Un aspecto positivo de MPM, frecuentemente mencionado en la literatura, es su habilidad para representar el comportamiento dinámico de cuerpos heterogéneos sometidos a grandes deformaciones (Sulsky, 1995). Esta clara ventaja con respecto al Método de Elementos Finitos (“Finite Element Method”, FEM) surge de usar una representación sin malla (“mesh-free”) para definir un cuerpo usando partículas. Como se indicó anteriormente, en MPM las ecuaciones de movimiento son resueltas utilizando una formulación débil con funciones de interpolación definidas en una grilla Euleriana. Estas funciones de interpolación proveen un vínculo cercano con FEM, de tal manera que MPM hereda varias de las ventajas y desventajas de este (Bardenhagen y Kober, 2004).

### “Locking” Volumétrico

Aunque MPM no sufre de problemas de distorsión de malla, puede exhibir problemas severos de “locking” volumétrico. Esto puede demostrarse usando MPM para modelar el quiebre de un embalse de agua. En este caso el material (fluido) puede caracterizarse utilizando una energía libre

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\xi}) = \bar{\psi}(\text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}), \boldsymbol{\xi}) + U(\theta) \quad (1)$$

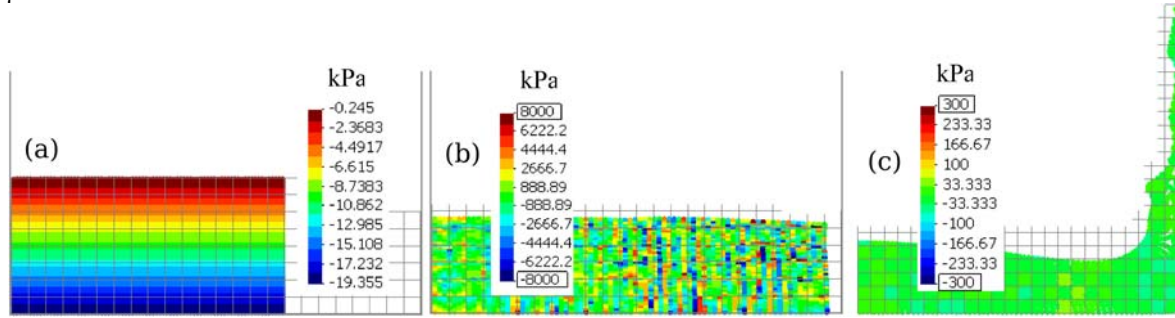
donde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es el tensor de deformación de Almansi,  $\boldsymbol{\xi}$  es una serie de variables internas dependientes del tiempo,  $\text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon})$  es el tensor de deformación desviador, y  $\theta = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$  es la deformación volumétrica.  $\bar{\psi}(\text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}), \boldsymbol{\xi})$  es la parte desviadora de la energía libre y  $U(\theta)$  la parte volumétrica de la energía libre. La relación de esfuerzo-deformación puede expresarse como

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + 2\mu \mathbf{d} = \rho \text{dev} \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon})} \right) + \rho \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{d} \quad (2)$$

donde  $\mu$  es la viscosidad dinámica,  $\rho$  es la densidad del material,  $\mathbf{1}$  es el tensor identidad y  $\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$  es el tensor de razón de deformación.  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  representa el campo de desplazamientos y  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$  es el campo de velocidad. En esta

ecuación los gradientes de deformación pueden asociarse con la parte de los esfuerzos dependientes del tiempo. El resto es un término viscoso dependiente del tiempo pero independiente de la historia de carga.

Escogiendo  $\bar{\psi} = G \text{dev}(\boldsymbol{\epsilon}) : \text{dev}(\boldsymbol{\epsilon})$ ,  $U = k \theta^2/2$  y  $\mu = 0$  resulta un material lineal elástico, mientras que para  $\bar{\psi} = 0$  y  $\mu > 0$  resulta un fluido Newtoniano (casi incompresible). Transiciones de estado pueden obtenerse usando  $\bar{\psi} \neq 0$ ,  $U \neq 0$  y  $\mu > 0$ .



**Figura 3:** Resultados del modelo de quiebre de un embalse de agua: (a) estado de esfuerzos iniciales; (b) resultados obtenidos usando una formulación MPM estándar a 1.4 seg del rompimiento del embalse con evidencia de “locking” severo; (c) resultados obtenidos usando una formulación MPM mixta a los 1.4 seg del rompimiento del embalse sin evidencia de “locking”.

En la Figura 3 se muestran resultados correspondientes a un modelo plano del quiebre de un embalse de agua obtenidos usando  $\bar{\psi} = 0$ ,  $U = k \theta^2/2$ , y módulo de compresibilidad  $k = 2.0 \text{ GPa}$  y  $\mu = 10^{-6} \text{ kPa}$ ; ambos valores típicos para agua a temperatura ambiente. La Figura 3(a) muestra el estado de presiones hidrostático inicial, que es representado apropiadamente por el modelo. La Figura 3(b) muestra el estado de esfuerzos medios (presiones) a los 1.4 seg después del rompimiento del embalse, obtenido usando una formulación MPM estándar y un modelo constitutivo apropiado para representar el material casi incompresible. Como se muestra en la figura, en este caso el fluido nunca alcanza a desplazarse hasta la pared exterior del contenedor y las presiones varían en exceso con valores pico que son hasta dos órdenes de magnitud más grandes que lo esperado. El origen de este problema de “locking” está en la manera en que la tasa de deformación volumétrica,  $\dot{\theta}$ , es evaluada usando las funciones de interpolación multi-lineales típicas del método MPM estándar. La representación de un flujo incompresible usando celdas cuadriláteras (2D) o celdas en forma de cubos de 8 nodos (3D), en general no reproducen satisfactoriamente la tasa de deformación volumétrica en la celda (Shin, 2009). En cambio la variación artificial de  $\dot{\theta}$  genera variaciones artificiales de presión. Además, partículas que cruzan a celdas adyacentes agregan oscilaciones numéricas, sin significado físico, como es claramente visible en la Figura 3(b) (Bodenhausen y Kober, 2004).

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

#### Técnica para atenuar el “locking” volumétrico

Una solución comúnmente utilizada en modelos de elementos finitos se presenta en el trabajo de Weissman y Taylor (1992) y Liu et al. (1994). En estos trabajos se usa el principio variacional de Hu-Washizu para introducir una dilatancia suave,  $\bar{\theta}$ , y una presión,  $\bar{p}$ , que se relacionan utilizando una formulación débil con las variables respectivas derivadas del campo de desplazamientos interpolado. Utilizando una grilla MPM regular, las ecuaciones cuasi-estáticas para una solución del tipo Hu-Washizu resultan en

$$\int_V \rho \bar{\psi}(\text{dev}(\boldsymbol{\epsilon}), \boldsymbol{\xi}) dV + \int_V \rho U(\bar{\theta}) dV - \int_V (\bar{\theta} - \text{tr} \boldsymbol{\epsilon}) \bar{p} dV - \int_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dV \rightarrow \text{estacionario} \quad (3)$$

donde, por simplicidad, solo fuerzas gravitacionales son incluidas. La variación con respecto a las variables independientes,  $\mathbf{u}$ ,  $\bar{\theta}$ , y  $\bar{p}$ , e integración por partes de todos los términos que incluyen derivadas de la variación de los desplazamientos,  $\delta \mathbf{u}$ , da lugar a las ecuaciones de Euler. Además de las ecuaciones de movimiento, se obtiene

$$\bar{\theta} = \text{div } \mathbf{u}, \quad \bar{p} = \rho \frac{\partial U(\bar{\theta})}{\partial \bar{\theta}}, \text{ and } \quad \boldsymbol{\sigma} = \rho \text{dev} \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \text{dev}(\boldsymbol{\epsilon})} \right) + \bar{p} \mathbf{1} \quad (4)$$

Una técnica eficiente se obtiene haciendo  $\bar{p}$ , y por lo tanto  $\bar{\delta \bar{p}}$ , constante en cada celda y cero fuera de ellas. Convirtiendo las integrales de volumen a integrales de masa y evaluándolas numéricamente como sumatorias en el dominio de partículas da lugar a un método MPM extendido con presión y deformación volumétricas promedio en cada celda definidos por

$$\bar{\theta}_c = \frac{\sum_{p \in c} \text{tr } \boldsymbol{\epsilon}_p \frac{m_p}{\rho_p}}{\sum_{p \in c} \frac{m_p}{\rho_p}} \quad \text{y} \quad \bar{p} = \rho_c \frac{\partial U(\bar{\theta}_c)}{\partial \bar{\theta}_c} \quad (5)$$

donde  $\rho_c$  es la densidad promedio en la celda. Esta ecuación se evalúa como un paso inicial adicional antes de ejecutar un nuevo paso en el algoritmo MPM. Para preservar la historia de carga en el material, la deformación y esfuerzo son modificadas de tal manera que

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p \rightarrow \text{dev} \boldsymbol{\varepsilon}_p + \frac{\bar{\theta}_c}{3} \mathbf{1} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\sigma}_p \rightarrow \text{dev} \boldsymbol{\sigma}_p + \bar{p}_c \mathbf{1} \quad (6)$$

para todas las partículas en la celda  $c$ .

Usando este procedimiento se elimina el problema de “locking” del método MPM estándar y se restablece el comportamiento del fluido correcto como se demuestra en la Figura 3(c).

Los flujos granulares difieren del problema de flujo de fluido en la existencia de la rigidez al corte (a través de una función de energía desviadora  $\bar{\psi}(\text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}), \boldsymbol{\xi})$  que no desaparece y una resistencia al corte baja, generalmente dependiente del esfuerzo medio). En este estudio se utilizó un modelo constitutivo del tipo Drucker Prager para modelar el colapso de una columna plana de arena.

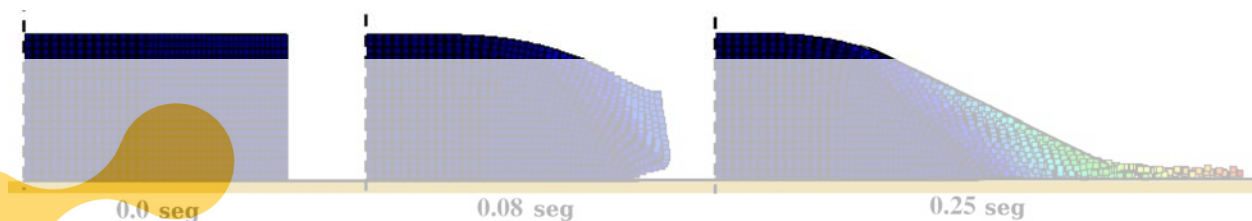


Figura 4: Colapso de una columna de arena plana. Desde la izquierda: configuración inicial, estado intermedio y configuración final.

La Figura 4 muestra resultados de esta simulación. El problema consiste en la modelación del estado inicial, colapso dinámico, y estado final en reposo. La eliminación rápida de la pared vertical de soporte desencadena la falla de la pared de material granular la cual se deposita a los pies de la columna alcanzando una pendiente de reposo muy semejante al ángulo de fricción en reposo del material. Para más información sobre este caso y el anterior referirse a Shin (2009). Una simulación equivalente usando el algoritmo MPM estándar no es capaz de reproducir estos resultados. Es también importante destacar que una simulación de elementos finitos, aun usando deformaciones finitas, no es capaz de reproducir estos resultados sin necesitar un re-mallado repetido.

## CONCLUSIONES

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

En este trabajo se presentan dos extensiones al modelo MPM estándar que permiten el análisis numérico de deslizamientos y movimientos de tierra. La primera consiste en el uso de una formulación de multi-fase que permite el análisis de mezclas sólido-fluido y su interacción a varias escalas. La segunda es el uso de una técnica sencilla y efectiva para eliminar el “locking”, la cual, además de eliminar este efecto, reduce errores inherentes al método MPM asociados con cruce de celdas. El costo computacional asociado con el procedimiento de “anti-locking” propuesto es mínimo en comparación con el algoritmo MPM, aun usando modelos constitutivos para deformaciones finitas.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero proporcionado por la National Science Foundation de los Estados Unidos (NSF) bajo el contrato CMMI-0900318.

## REFERENCIAS

- Bardenhagen, S. G. y Kober, E. M. (2004). “The generalized interpolation material point method”, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol. 5, No. 6, pp. 477 – 495.
- Highland, L. M. (2006). “Estimating landslide losses—preliminary results of a seven-state pilot project”, *Technical Report 2006:1032*, USGS, <http://pubs.usgs.gov/of/2006/1032/pdf/OFR-2006-1032.pdf>.
- Li, X. S. y Dafalias, Y. F., (2000). “Dilatancy for cohesionless soils”, *Geotechnique*, Vol. 50, No. 4, pp. 449–460.
- Liu, C. H., Hofstetter, G. y Mang, H. A., (1994). “3D finite element analysis of rubber-like materials at finite strains”, *Engineering Computations*, Vol. 11, No. 2, pp. 111–128.

Mackenzie-Helnwein, P., Arduino, P., Shin, W., Moore, J. A., y Miller, G. R., (2010). "Modeling strategies for multiphase drag interactions using the material point method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 83, Issue 3, pp. 295-322.

Shin, W., (2009). *Modeling Mixing and Separation of Solid Matter and Fluid in Landslides and Debris Flows by Representing the Multiphase Material through Distinct Phases*, PhD thesis, University of Washington, Seattle, Washington.

Sulsky, D., Zhou, S. y Schreyer, H. L., (1995). "Application of a particle-in-cell method to solid mechanics", *Computer Physics Communications*, Vol. 87, No. 1-2, pp. 236 – 252.

Weissman, S. L. y Taylor, R. L., (1992). "Treatment of internal constraints by mixed finite element methods: Unification of concepts", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, pp. 131–141.



Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark